Convergencia Binomial a Black & Scholes

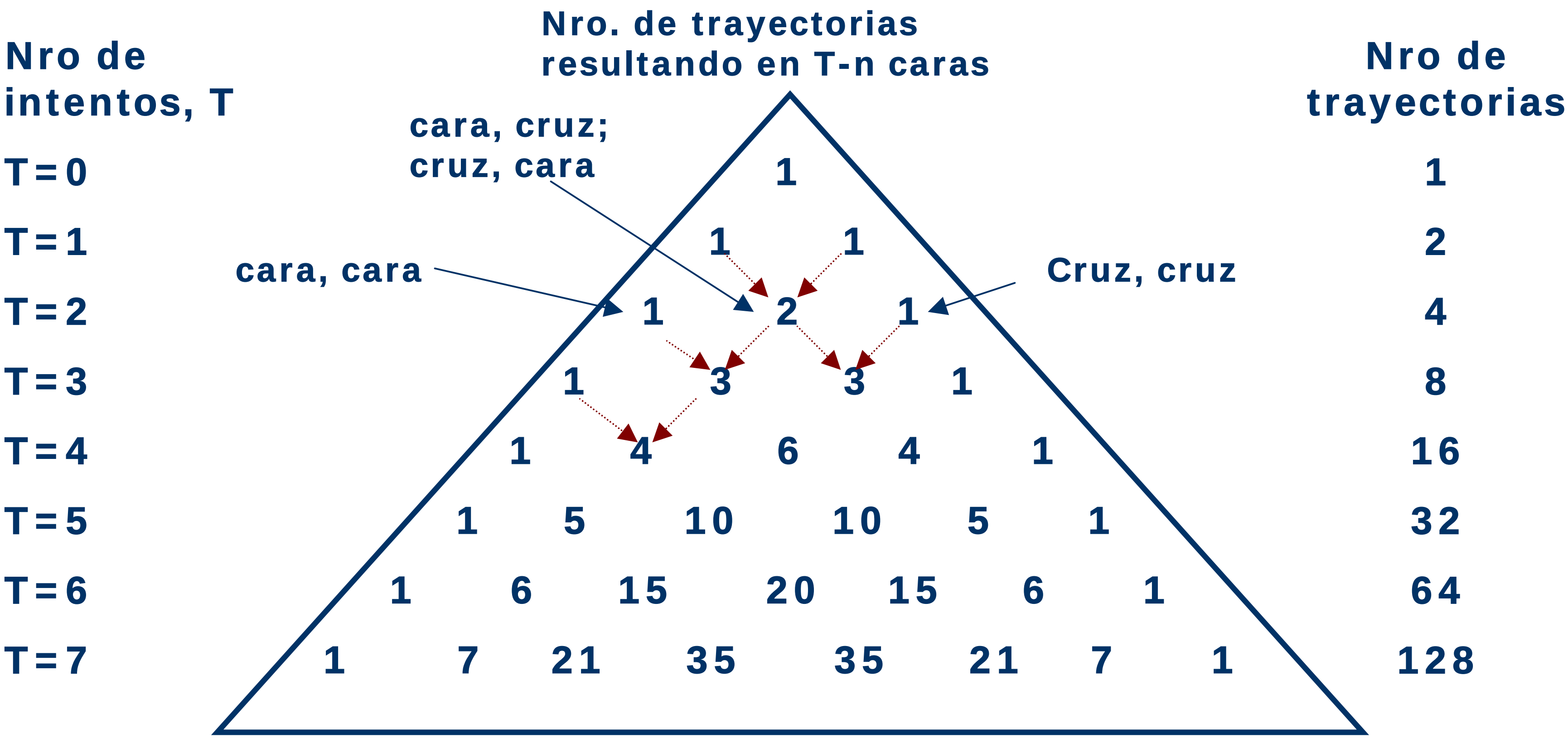
Dr. Guillermo López Dumrauf

Indice

Profundizaremos las soluciones con árboles binomiales **dividiendo los períodos anuales en intervalos mucho menores**, para mostrar como en el límite, la solución continua se aproxima a B&S. La secuencia de los temas será la siguiente:

- Triángulo de Pascal
- Cálculo Combinatorio
- Modelo de valuación de opciones
- Convergencia Binomial a Black & Scholes
- Construir modelos en Excel para valuar opciones básicas

El triángulo de Pascal



El triángulo de Pascal constituye un auxilio simple para **observar la distribución de los resultados de un test binomial que puede presentar sólo dos alternativas** (por ej, el lanzamiento de una moneda o el "*upside*" o el "*downside*" en el árbol binomial para valuar una opción)

El triángulo de Pascal

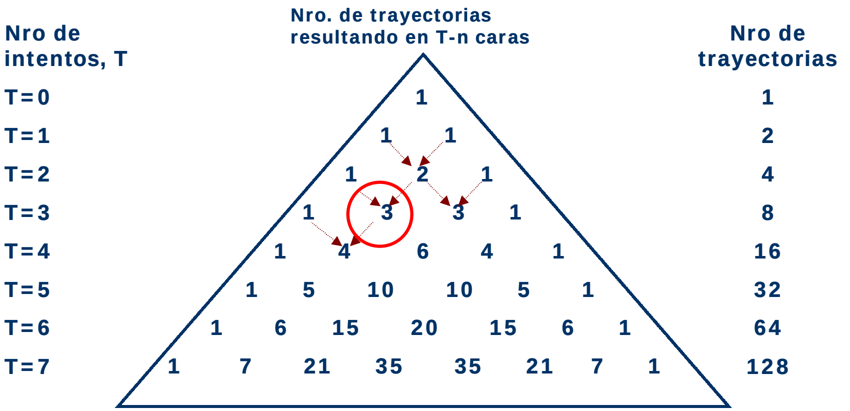
La probabilidad de observar ***n*** caras al lanzar una moneda, en ***T*** tentativas es

$$P(n/T) = coef\ x\ p^{n}(1-p)^{T-n}$$

Donde “*coef*” es el coeficiente del triángulo de Pascal.

Por ejemplo, la probabilidad de observar **dos caras y una cruz en tres tentativas es**

$$P(2/3) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{8}$$



Por cálculo combinatorio

Si utilizamos el cálculo combinatorio en vez del triángulo de Pascal para descubrir el **número de combinaciones para obtener dos caras en tres tentativas** podemos calcular el valor del coeficiente con la notación combinatoria:

$$coef. = \binom{T}{n} = \frac{T!}{(T-n)!n!}$$

$$coef. = \binom{3}{2} = \frac{3\times2\times1}{(3-2)!2!} = 3$$

Por cálculo combinatorio

Utilizando la notación combinatoria, **la probabilidad binomial de obtener *n* caras en *T* intentos**, dada la probabilidad *p* para una cara, será:

$$B(n,/T,p)=\begin{pmatrix} T \\ n \end{pmatrix} p^n (1-p)^{T-n}$$

Por ejemplo, **la probabilidad de obtener 3 caras en 7 lanzamientos es:**

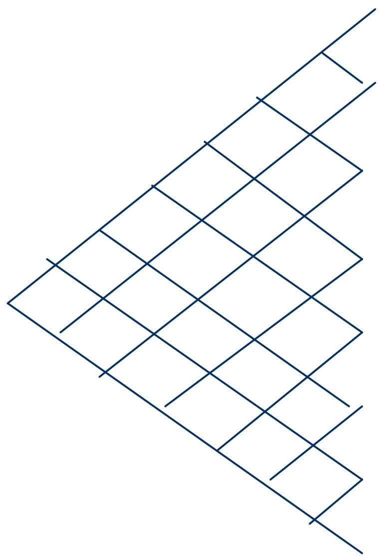
$$B(3\,caras,/\,7\,lanzamientos,\,p=0{,}5)=\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} 0{,}5^3 0{,}5^{7-3}=\frac{7!}{(7-3)!3!}0{,}5^7$$

$$=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)(3\times2\times1)}0{,}0078125=35\times0{,}0078125=0{,}2734375=27{,}34\%$$

Probabilidades binomiales en 7 intentos

P=0,50

1-P=0,5



Probabilidad

0,0078125

0,0546875

0,1640625

0,2734375

0,2734375

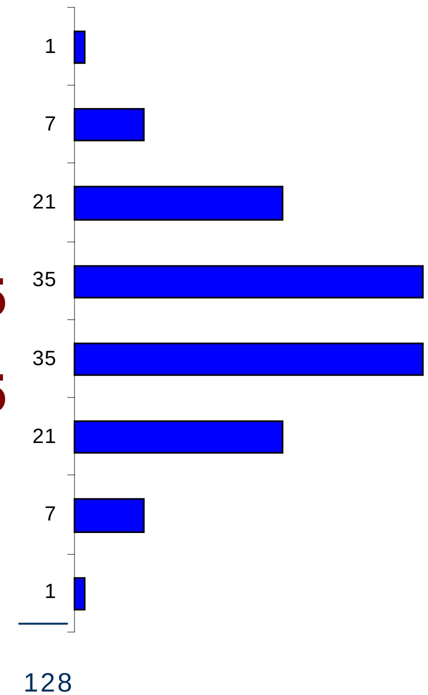
0,1640625

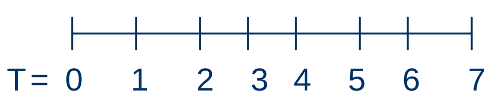
0,0546875

<u>0,0078125</u>

1,00

Coef.





Extensión del abordaje binomial para muchos períodos

Si hay hay un **proceso multiplicativo, donde *T* es el número total de períodos y *n* el número de movimientos ascendentes** del valor del activo subyacente, la función de retorno puede expresarse como

$$MAX\left[0, u^n d^{T-n} V_0 - X\right]$$

Aplicando lo que vimos antes, la probabilidad binomial de cada retorno es

$$B(n, / T, p) = \binom{T}{n} p^n (1-p)^{T-n}$$

Extensión del abordaje binomial para muchos períodos

Multiplicando los retornos por sus respectivas probabilidades y sumando horizontalmente todos los retornos posibles, tenemos:

$$C_0 = \left[\sum_{n=0}^{T} \underbrace{\overbrace{\frac{T!}{(T-n)!n!} p^n (1-p)^{T-n}}^{\textbf{Probabilidad}}}_{\textbf{Coef.}} \overbrace{MAX(0, u^n d^{T-n} V_0 - X)}^{\textbf{Retornos}} \right] \div (1+rf)^T$$

Extensión del abordaje binomial para muchos períodos

Varios retornos finales serán iguales a cero (*“out of the money”*)

Siendo **“A” el número entero de situaciones en que la opción queda *“in the money”*,** *todas las situaciones en que n<A el retorno es igual a cero, ya que la opción no se ejercerá*.

Ahora separamos la ecuación anterior en dos partes:

$$C_0 = V_0 \underbrace{\left[\frac{1}{(1+rf)^T} \sum_{n=A}^{T} \frac{T!}{(T-n)!n!} p^n (1-p)^{T-n} MAX(0, u^n d^{T-n} \right]} - \frac{X}{(1+rf)^T} \underbrace{\left[\sum_{n=A}^{T} \frac{T!}{(T-n!)n!} p^n (1-p)^{T-n} \right]}$$

Probabilidad binomial complementaria, que es igual al recíproco del coeficiente de hedge (*). Para estimar la probabilidad complementaria a ser utilizada en este primer término hacemos:

Distribución binomial complementaria, Representa la **probabilidad de que la opción quede in the money:** B(n≥a|T,p).

$$p' = \frac{u\ p}{(1+rf)}$$

(*) Ya que representa el número de acciones que tenemos que mantener en un portafolio con una acción y Δ opciones de compra.

Convergencia Binomial a Black & Scholes

A partir del teorema del límite central, Cox, Ross y Rubinstein (1979) demostraron que cuando n→∞

$$\sum_{n=A}^{T} \frac{T!}{(T-n)!n!} p^n (1-p)^{T-n} \frac{u^n d^{T-n}}{(1+rf)^T} = \sum_{n=A}^{T} \frac{T!}{(T-n)!n!} \left(\frac{up}{1+rf}\right)^n \left(\frac{(1-p)d}{1+rf}\right)^{T-n} \rightarrow N(d1)$$

Número entero más pequeño mayor o igual a $\frac{\ln(X/S) - \sigma\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{T}}$

$$\sum_{n=A}^{T} \frac{T!}{(T-n)!n!} p^n (1-p)^{T-n} \rightarrow N(d2)$$

Extensión del abordaje binomial para muchos períodos

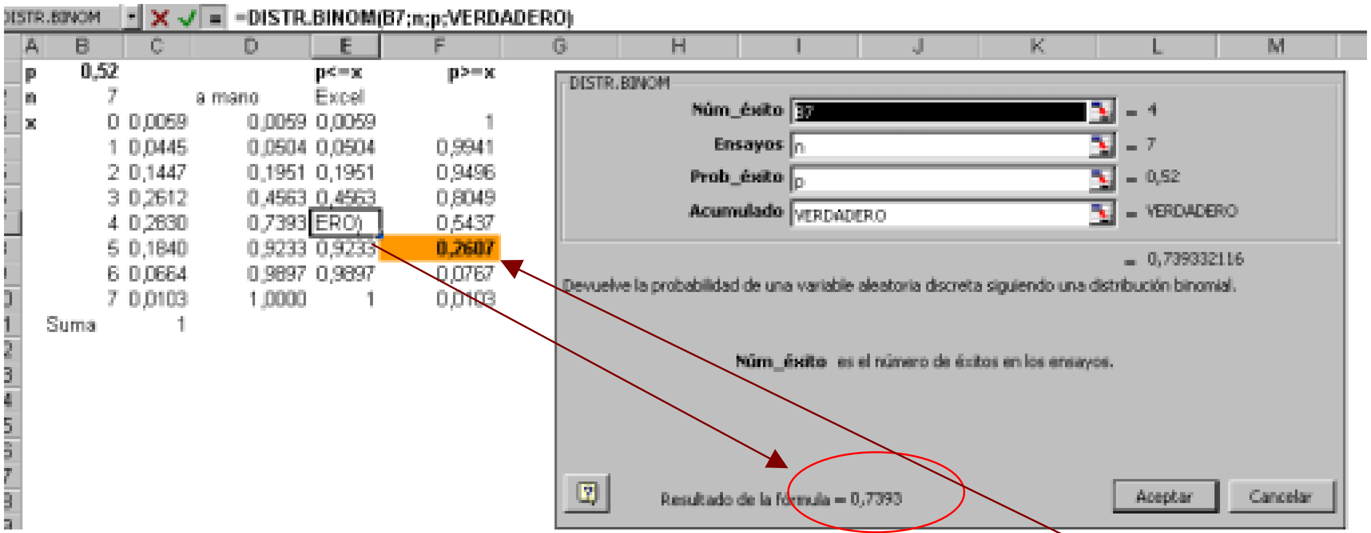
Por ejemplo, si S=100 y u=1,5; d=0,66 con X=250; T=7 y rf=10% anual, hay ocho situaciones finales, la opción está en dinero en aquellas situaciones en que el número de movimientos ascendentes es de 5,6 o 7 **(3 situaciones).** Por lo tanto, el valor de la situación límite es 5

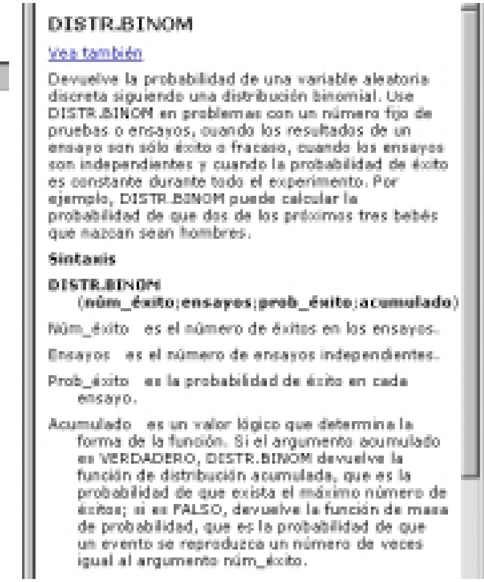
Arbol de eventos del activo subyacente

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	100	150	225	338	506	760	1139	1709
1		67	100	150	225	338	506	760
2			44	67	100	150	225	338
3				30	44	67	100	150
4					20	30	44	67
5						13	20	30
6							9	13
7								6

Calculando la probabilidad neutra p=0,52, **la probabilidad binomial complementaria es la probabilidad acumulada de que la opción quede en dinero** (ímplicita en las probabilidades neutras) que en este caso es del 26%

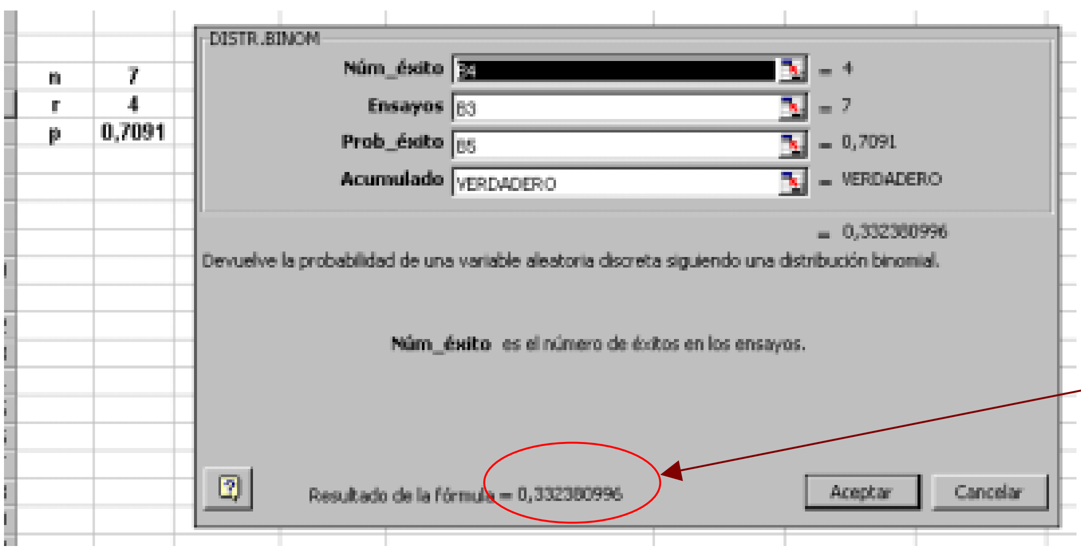
Cálculo de las probabilidades binomiales complementarias





Probab. de que la opción quede en dinero: como se precisan 5 mov. ascendentes, tenemos que hacer:

[1-Bi acum (n=7, a=4, p)]=1-0,7393=0,2607



$$p' = \left[\frac{u}{(1+rf)}\right]p = \left(\frac{1{,}5}{1{,}1}\right)0{,}52 = 0{,}7091$$

Valor probabilidad binomial complementaria es B(n≥a|7;0,7091)=0,6676 (la inversa de la probabilidad acumulada de alcanzar el precio de ejercicio que aparece en la ventana del Excel (1-0,33238)=0,6676 (ya que precisamos la probabilidad acumulada de 5 a 7)

Valor de la opción utilizando la binomial en 7 pasos

De esta manera, el valor de la opción es:

$$Co = \mathbf{Vo}\ B(n \geq a|T,p') - \mathbf{X}\ (1+rf)^{-T}\ B(n \geq a|T,p)$$
$$= 100\ \mathbf{(0{,}6676)} - 250(1{,}10)^{-7}\ \mathbf{(0{,}2606)} = 66{,}75 - 33{,}44 = \mathbf{33{,}32}$$

El valor que surge de aplicar Black & Scholes es de 33,59, una diferencia de apenas 27 centavos.

Cuando aumentamos el número de períodos por año, la diferencia desaparece, cómo se muestra en los ejemplos que siguen.

Montaje de un árbol binomial en planilla de cálculo

Tasa libre de riesgo	10%	*u*	1,500
Valor activo subyacente	100	*d*	0,667
Precio de ejercicio	250		
T (vida útil opción)	7	*p*	0,520
Desvío típico	40,55%	*1-p*	0,480
Número pasos x año	**1**	Subperíodos	7

Black-Scholes Formula

C = 33,59

Arbol de eventos del activo subyacente

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	100	150	225	338	506	760	1139	1709
1		67	100	150	225	338	506	760
2			44	67	100	150	225	338
3				30	44	67	100	150
4					20	30	44	67
5						13	20	30
6							9	13
7								6

Valor de la opción

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	**33,32**	60	108	189	327	553	912	1459
1		11	22	42	79	150	279	510
2		0	2	4	9	20	41	88
3			0	0	0	0	0	0
4				0	0	0	0	0
5						0	0	0
6							0	0
7								0

Montaje de un árbol binomial en planilla de cálculo

Tasa libre de riesgo	3,23%	*u*	1,264
Valor activo subyacente	100	*d*	0,791
Precio de ejercicio	250		
T (vida útil opción)	7	*p*	0,510
Volatilidad anual	40,55%	*1-p*	0,490
Número pasos x año	**3**		

Black-Scholes Formula

C = 33,59

Ir a hoja de Excel

Arbol de eventos del activo subyacente

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	126	160	202	255	322	407	515	651	822	1039
1		79	100	126	160	202	255	322	407	515	651
2			63	79	100	126	160	202	255	322	407
3				50	63	79	100	126	160	202	255
4					39	50	63	79	100	126	160
5						31	39	50	63	79	100
6							25	31	39	50	63
7								19	25	31	39
8									15	19	25
9										12	15
10											10
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											

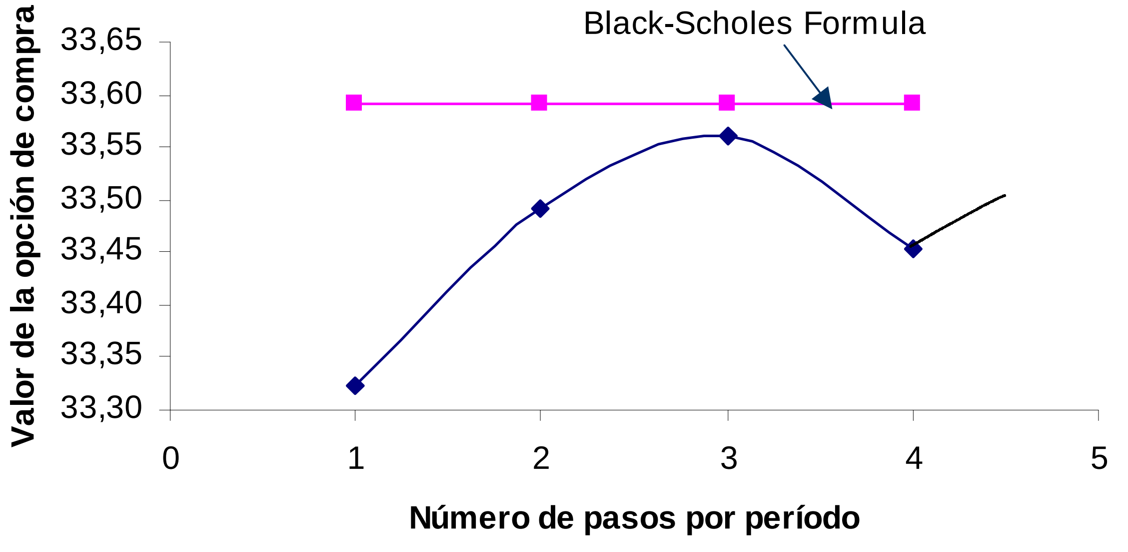
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1313	1660	2098	2651	3351	4234	5352	6763	8547	10802	13651
1	822	1039	1313	1660	2098	2651	3351	4234	5352	6763	8547
2	515	651	822	1039	1313	1660	2098	2651	3351	4234	5352
3	322	407	515	651	822	1039	1313	1660	2098	2651	3351
4	202	255	322	407	515	651	822	1039	1313	1660	2098
5	126	160	202	255	322	407	515	651	822	1039	1313
6	79	100	126	160	202	255	322	407	515	651	822
7	50	63	79	100	126	160	202	255	322	407	515
8	31	39	50	63	79	100	126	160	202	255	322
9	19	25	31	39	50	63	79	100	126	160	202
10	12	15	19	25	31	39	50	63	79	100	126
11	8	10	12	15	19	25	31	39	50	63	79
12		6	8	10	12	15	19	25	31	39	50
13			5	6	8	10	12	15	19	25	31
14				4	5	6	8	10	12	15	19
15					3	4	5	6	8	10	12
16						2	3	4	5	6	8
17							2	2	3	4	5
18								1	2	2	3
19									1	1	2
20										1	1
21											1

Valor de la opción

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	33,56	49	70	100	140	196	269	365	491	655	864
1		20	30	44	64	93	132	186	258	354	480
2			11	17	26	39	58	85	123	175	246
3				6	9	14	22	33	51	76	112
4					2	4	7	11	18	28	43
5						1	2	3	5	8	13
6							0	1	1	2	3
7								0	0	0	0
8									0	0	0
9										0	0
10											0
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1132	1472	1904	2451	3144	4021	5131	6536	8313	10560	13401
1	643	852	1120	1460	1891	2438	3130	4007	5117	6521	8297
2	341	467	630	839	1107	1447	1878	2424	3116	3992	5102
3	163	233	328	453	616	826	1093	1430	1863	2409	3101
4	67	101	150	219	313	439	602	812	1079	1418	1848
5	22	35	56	88	136	203	297	423	588	797	1063
6	5	9	16	27	45	74	119	186	280	409	572
7	1	2	3	5	10	18	32	57	99	165	266
8	0	0	0	1	1	2	4	9	18	36	72
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13			0	0	0	0	0	0	0	0	0
14				0	0	0	0	0	0	0	0
15					0	0	0	0	0	0	0
16						0	0	0	0	0	0
17							0	0	0	0	0
18								0	0	0	0
19									0	0	0
20										0	0
21											0

Convergencia Binomial a Black & Scholes



Otro ejemplo de la convergencia

Suponga una opción de compra europea con las siguientes características:

$S=100$; $E=100$; $T=1$ año; $rf=5\%$ anual continuo, $\sigma=25\%$ anual(calculada sobre el retorno logarítmico) y no paga dividendos

Usando la fórmula de B&S, resulta un valor de $ 12,336

Black & Scholes

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + r_f T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{100}{100}\right) + 0{,}05}{0{,}25\sqrt{1}} + \frac{0{,}25\sqrt{1}}{2} = 0{,}325$$

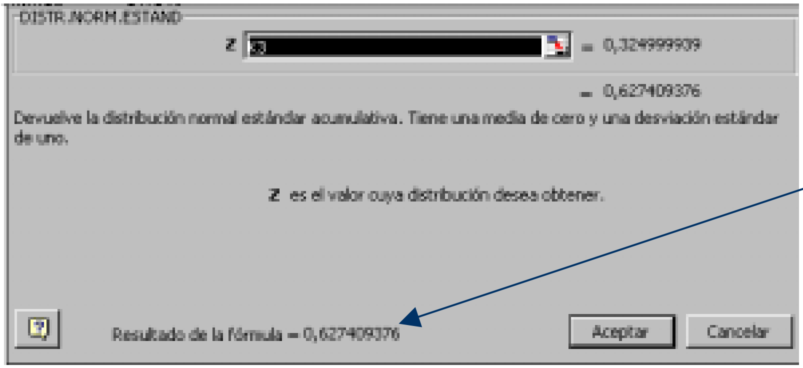
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_2 = 0{,}325 - 0{,}25\sqrt{1} = 0{,}075$$

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d2)$$

$$C = 100N(0{,}375) - 100e^{-0{,}05}N(0{,}125)$$

$$C = 100\,x\,0{,}6274 - 100e^{-0{,}05}0{,}5299 = 12{,}336$$



La distribución normal acumulativa puede calcularse fácilmente con Excel

La binomial con 5 y 10 pasos por año

	0	1	2	3	4	5
0	100	111,83	125	140	156	175
1		89	100	112	125	140
2			80	89	100	112
3				72	80	89
4					64	72
5						57
6						
7						

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	105,75	111,83	118	125	132	140	148	156	165	175
1		95	100	106	112	118	125	132	140	148	156
2			89	95	100	106	112	118	125	132	140
3				85	89	95	100	106	112	118	125
4					80	85	89	95	100	106	112
5						76	80	85	89	95	100
6							72	76	80	85	89
7								68	72	76	80
8									64	68	72
9										60	64
10											57
11											
12											
13											
14											
15											
16											

El resultado que se produce en el árbol de 5 pasos ocurre dos períodos después cuando trabajamos con 10 pasos. Cuando hay más subperíodos en el árbol, éste muestra una mayor granularidad y precisión...

Binomial – Black Scholes: comparación

Black-Scholes Formula	**12,336**
5 pasos por año	12,81
10 pasos por año	12,10
20 pasos por año	12,22
50 pasos por año	12,29
100 pasos por año	12,31
10.000 pasos por año	**12,336**

Ejercicios

1. Realice el cálculo con la función combinatoria (a mano) para un árbol binomial con 5 pasos por año (y luego compruebe directamente los resultados con la función para la probabilidad binomial acumulativa)
2. Compruebe los resultados para un árbol binomial con 10 pasos por año utilizando directamente la función para la probabilidad binomial acumulativa de Excel (la opción queda en dinero en 5 oportunidades

Convergencia Binomial-B&S en 5 pasos

A	B	C	D	E	F
Datos para calcular el valor de la opción			**Datos para calcular probabilidades binomiales**		
Precio activo subyacente	100		Ensayos	5	
Precio ejercicio	100		Exitos	3	
Risk free rate (anual)	5%		Prob.de superar K	53,17%	(Probab. Binomial complementaria de j éxitos en n intentos)
Risk free rate	1,01%			63,37%	(Probab. Binomial complementaria de j éxitos en n intentos)
Volatilidad	25%				
Años	1				
Pasos por año	5				
u	1,118				
d	0,894				
Probabilidad neutral	0,5169				
Probabilidad neutral ajustada	0,5723				
Valor de la Opción					
Precio (esperado)	63,3734				
PV P.ej. (esperado)	50,5788				
Valor opción por binomial	**12,79**				
Black-Scholes	12,34				
d1	0,325				
d2	0,075				
N(d1)	0,627				
N(d2)	0,530				

X	p<=x	Acumulativa	p>=x
0	0,026306	0,026305608	1
1	0,140748	0,167053141	0,97369439
2	0,301227	0,468279677	0,83294686
3	0,322341	0,790620764	0,53172032
4	0,172468	0,963088598	0,20937924
5	0,036911	1	0,0369114

X	p<=x	Acumulativa	p>=x
0	0,014307	0,014307232	1
1	0,095732	0,110039704	0,98569277
2	0,256226	0,36626553	0,8899603
3	0,342891	0,70915689	0,63373447
4	0,229435	0,938592161	0,29084311
5	0,061408	1	0,06140784

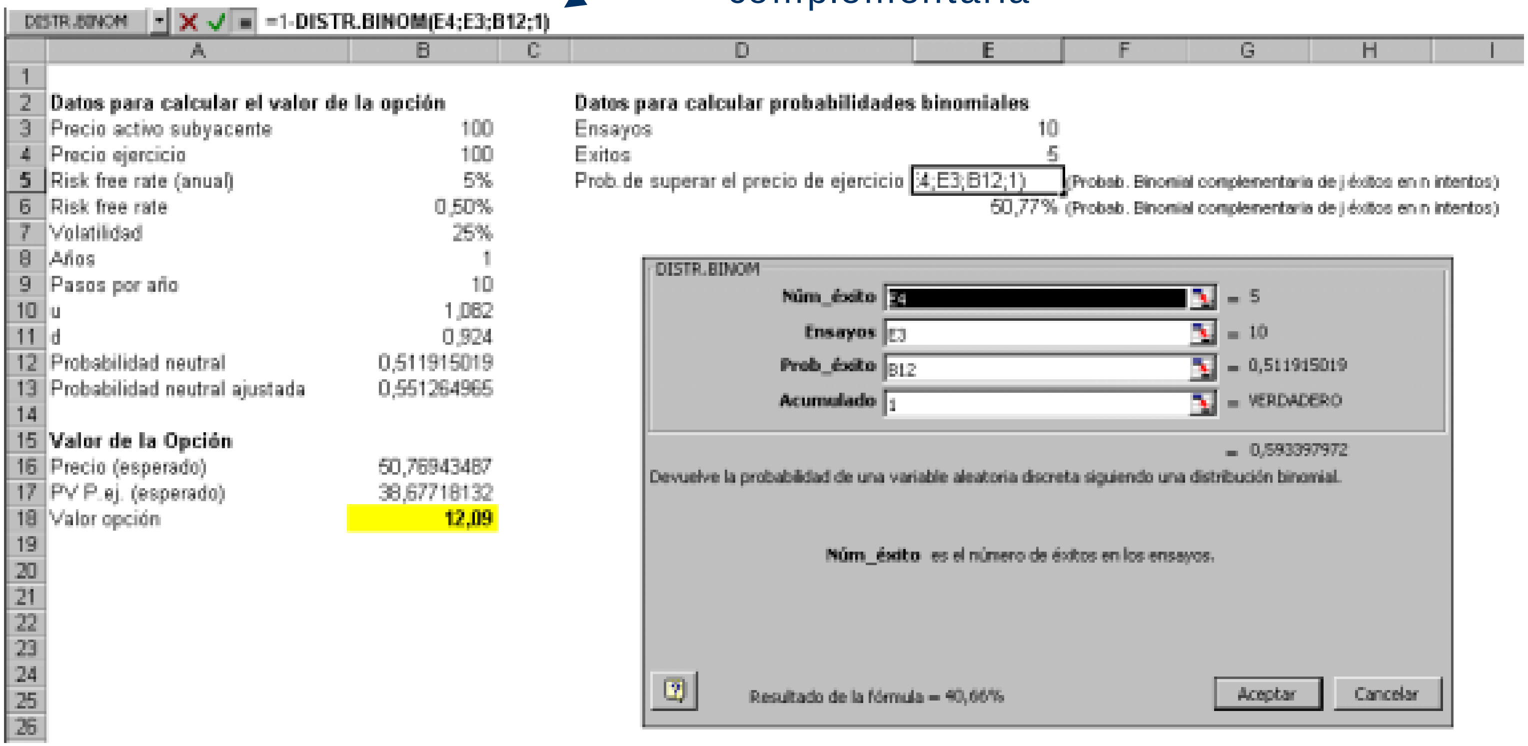
Valor opción por binomial 12,7946452

Probabilidad acumulativa de obtener 3 alzas en 5 trayectorias (es igual a 1-prob acumulativa de 2 alzas)

Para comprobar los resultados, tenemos que colocar cómo “éxitos” la cantidad de veces que la opción queda en dinero en los nodos finales del árbol binomial y modicar la cantidad de pasos por año…

Convergencia Binomial-B&S en 10 pasos

Probabilidad binomial complementaria



Para comprobar los resultados, tenemos que colocar cómo "éxitos" la cantidad de veces que la opción queda en dinero en los nodos finales del árbol binomial y modicar la cantidad de pasos por año…

Nota técnica: combinatoria

$C_{4,3}$

abc	abd	acd	bcd

Las combinaciones de 4 elementos diferentes (a,b,c,d) se obtienen agregando a la derecha de cada una de las combinaciones de primer y segundo orden, cada uno de los elementos que le siguen en el orden dado (cuando ellos sea posible)

$P_{3,3}$

acb	acb	acb	acb
bac	bac	bac	bac
bca	bca	bca	bca
cab	cab	cab	cab
cba	cba	cba	cba

Las permutaciones son los distingos grupos que pueden formarse con todos los elementos dados, y para considerarse diferentes basta que cambie el orden dado

$$A_{4,3} = C_{4,3} \times P_{3,3}$$

Los arreglos de n elementos, siendo n<T, son los distintos grupos que pueden formarse con n elementos tomados de los T dados, de manera que dos grupos cualesquiera difieran por lo menos en un elmento o en el orden de colocación

$$C_{4,3} = \frac{A_{4,3}}{P_{3,3}} = \frac{T!}{n!(T-n)!} = \frac{4x3x2}{3x2x1} = \frac{24}{6} = 4$$

Conclusiones

- Si dividimos los períodos anuales en intervalos mucho menores en el límite (instantes) los resultados se aproximan a una solución continua

- Los árboles binomiales son más versátiles que las soluciones con cálculos diferenciales estocásticos, más elegantes, pero más complicadas de entender y explicar.

- Desde el punto de vista de quien practica, la matemática discreta es de entendimiento más fácil que las ecuaciones diferenciales estocásticas.

- Existen además otros inconvenientes para aplicar B&S a las opciones reales **(dividendos, cambios en la varianza del activo, las decisiones a tomar en cada nodo)**